# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ $2^η$ ΔΕΚΑΔΑ

## 11.

**α)** Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+\frac{y}{2}=\frac{5}{2} \\ x-y=1 \end{cases}$

**β)** Στο σύστημα $\begin{cases} ....x+y=4 \\ 6x-....y=3 \end{cases}$ κάποιοι από τους συντελεστές των x και y σβήστηκαν κατά λάθος . Να τους προσδιορίσετε, αν γνωρίζετε ότι το σύστημα έχει λύση την $x=-\frac{1}{3}$ και $y=-\frac{5}{3}$

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

$\begin{cases} x+\frac{y}{2}=\frac{5}{2} \\ x-y=1 \end{cases}$ άρα $\begin{cases} 2x+2\cdot\frac{y}{2}=2\cdot\frac{5}{2} \\ x-y=1 \end{cases}$ άρα $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε $3x = 6$ άρα $x = 2$.
Τότε από την $2^η$ των εξισώσεων βρίσκουμε $y = 1$

**β)**

Αν κ και λ είναι οι συντελεστές που σβήστηκαν,το σύστημα γίνεται $\begin{cases} \kappa x+y=4 \\ 6x-\lambda y=3 \end{cases}$

Και επειδή λύση του είναι η $x=-\frac{1}{3}$ και $y=-\frac{5}{3}$ , έχουμε $\begin{cases} \kappa\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)=4 \\ 6\left(-\frac{1}{3}\right)-\lambda\left(-\frac{5}{3}\right)=3 \end{cases}$

$$\begin{cases} -\kappa-5=12 \\ -6+5\lambda=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa=-17 \\ \lambda=3 \end{cases}$$

## 12.

Να βρείτε τις τιμές των κ και λ έτσι ώστε να ισχύει

**α)** $\left(-15x^{3\kappa-1}\cdot y^{\lambda}\right):(-3x^{\kappa}y^{2})=5x^{3}y$ **β)** $\left(4\alpha^{2\kappa-1}\cdot\beta^{3\lambda}\right):(12\alpha^{\kappa+2}\beta^{\lambda+1})=\frac{1}{3}\alpha\beta^{3}$

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

$\left(-15x^{3\kappa-1}\cdot y^{\lambda}\right):(-3x^{\kappa}y^{2})=5x^{3}y$ άρα $(-15):(-3)\,x^{3\kappa-1-\kappa}\ y^{\lambda-2}=5x^{3}\,y$

$5\,x^{2\kappa-1}\ y^{\lambda-2}=5x^{3}\,y$

$2\kappa-1=3$ και $\lambda-2=1$

$\kappa=2$ και $\lambda=3$

**β)**

$\left(4\alpha^{2\kappa-1}\cdot\beta^{3\lambda}\right):(12\alpha^{\kappa+2}\beta^{\lambda+1})=\frac{1}{3}\alpha\beta^{3}$ άρα $(4{:}12)\,\alpha^{2\kappa-1-\kappa-2}\ \beta^{3\lambda-\lambda-1}=\frac{1}{3}\alpha\beta^{3}$

$\frac{1}{3}\,\alpha^{\kappa-3}\,\beta^{2\lambda-1}=\frac{1}{3}\alpha\beta^{3}$

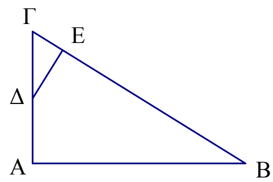
$\kappa-3=1$ και $2\lambda-1=3$

$\kappa=4$ και $\lambda=2$

## 13.

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το Δ είναι μέσο της ΑΓ και το ΔΕ είναι κάθετο στην υποτείνουσα ΒΓ.
Ακόμα είναι ΑΒ = 8, ΑΓ = 6 και ΓΕ = 3.

**α)** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΓ είναι όμοια.
**β)** Να γράψετε την αναλογία των ομολόγων πλευρών.
**γ)** Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΓΔ , ΔΕ




**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Είναι όμοια διότι έχουν την $\hat{\Gamma}$ κοινή και $\hat{A}=\hat{E}=90^{o}$

**β)**

Οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.

Οπότε $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{A\Gamma}{\Gamma E}$

**γ)**

Πυθαγόρειο στο ΑΒΓ : $B\Gamma^{2}=AB^{2}+A\Gamma^{2}=$

$=8^{2}+6^{2}=64+36=100$ άρα $B\Gamma=\sqrt{100}=10$

Η αναλογία των ομολόγων πλευρών γίνεται $\frac{8}{\Delta E}=\frac{10}{\Gamma\Delta}=\frac{6}{3}=2$

Συνεπώς $\frac{8}{\Delta E}=2$ άρα $\Delta E=4$

και $\frac{10}{\Gamma\Delta}=2$ άρα $\Gamma\Delta=5$

## 14.

Δίνονται τα πολυώνυμα

$A = x^4 - x^2$ και $B = x^3 + 2x^2 - x - 2$

**α)** Να αναλύσετε τα Α και Β σε γινόμενα παραγόντων.

**β)** Να λύσετε την εξίσωση $A = B$

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

$A = x^4 - x^2 = x^2 (x^2 - 1) = x^2 ( x - 1)( x + 1)$

$B = x^3 + 2x^2 - x - 2 = x^2 (x + 2) - ( x + 2) =$

$= (x + 2) ( x^2 - 1) =$

$= (x + 2 ) ( x - 1)( x + 1)$

**β)**

$A = B$ άρα $x^2 ( x - 1)( x + 1) = (x + 2) ( x - 1)(x + 1)$

$x^2 (x - 1)(x + 1) - (x + 2 ) (x - 1)(x + 1) = 0$

$(x - 1)(x + 1)[x^2 - (x + 2 )] = 0$

$(x - 1)(x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$

$x - 1= 0$ ή $x + 1 = 0$ ή $x^2 - x - 2 = 0$

$x = 1$ ή $x = - 1$ ή $x^2 - x - 2 = 0$

Η εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$ έχει $\Delta = 9$ και ρίζες $x = 2$ ή $x = - 1$

Τελικά οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι : $x = 1$ ή $x = - 1$ (διπλή) ή $x = 2$

## 15.

**α)** Να αποδείξετε ότι

**i)** $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ **ii)** $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

**β)** Αν $\alpha + \beta = -\dfrac{1}{3}$ και $\alpha\beta = -\dfrac{7}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

**i)** $\alpha^2 + \beta^2$ **ii)** $(3\alpha + 1)^2 + (3\beta + 1 )^2 + 12 (\alpha + \beta)$ **iii)** $\alpha^3 + \beta^3$

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$

$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = \alpha^3 + \beta^3$

**β)**

**i)** $\alpha^2 + \beta^2 \overset{(\alpha.\ i)}{=} (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\dfrac{7}{3}\right) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{14}{3} = \dfrac{43}{9}$

**ii)** $(3\alpha + 1)^2 + (3\beta + 1 )^2 + 12 (\alpha + \beta) = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 + 9\beta^2 + 6\beta + 1 + 12\alpha + 12\beta =$

$= 9\alpha^2 + 18\alpha + 18\beta + 9\beta^2 + 2 =$

$= 9( \alpha^2 + \beta^2 ) + 18( \alpha + \beta) + 2 =$

$\overset{(i)}{=} 9\cdot \dfrac{43}{9} + 18 \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 2 = 43 - 6 + 2 = 39$

**iii)** $\alpha^3 + \beta^3 \overset{(\alpha.ii)}{=} ( \alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta( \alpha + \beta) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 - 3\left(-\dfrac{7}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right) =$

$= -\dfrac{1}{27} - \dfrac{7}{3} = -\dfrac{64}{27}$

## 16.

Έστω η συνάρτηση $y = 4x^2 + βx + 9$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$

**α)** Να βρείτε την τιμή του β.

**β)** Για $β = 37$ να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων

**γ)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή την οποία να βρείτε.

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Αφού η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$, ισχύει

$$0 = 4\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + β\left(-\frac{1}{4}\right) + 9 \quad άρα \quad \frac{1}{4} - \frac{β}{4} + 9 = 0$$

$$1 - β + 36 = 0 \quad άρα \quad β = 37$$

**β)**

Για $β = 37$ η συνάρτηση γίνεται $y = 4x^2 + 37x + 9$

Για $y = 0$ έχουμε $4x^2 + 37x + 9 = 0$ με $Δ = 1225$ και ρίζες $x = -9$ ή $x = -\frac{1}{4}$

Επομένως τα σημεία τομής με τον άξονα των x είναι τα $(-9, 0)$ και $\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$

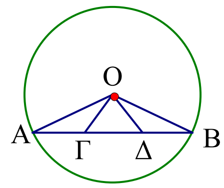
Για $x = 0$ έχουμε $y = 9$. Άρα το σημείο τομής με τον άξονα των είναι το $(0, 9)$

**γ)**

Επειδή $α = 4 > 0$, η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή για $x = -\frac{β}{2α} = -\frac{37}{8}$

Η ελάχιστη τιμή είναι $y = -\frac{Δ}{4α} = -\frac{1225}{16}$

## 17 .




Στον διπλανό κύκλο είναι ΑΓ = ΒΔ. Να αποδείξετε ότι

**α)** Τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ είναι ίσα.

**β)** Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές .

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Είναι ΟΑ = ΟΒ ως ακτίνες του κύκλου, άρα το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές ,

οπότε $O\hat{A}Γ = O\hat{B}Δ$

Τώρα ΟΑ = ΟΒ

ΑΓ = ΒΔ υπόθεση

$O\hat{A}Γ = O\hat{B}Δ$ (Π-Γ-Π) επομένως τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ είναι ίσα

**β)**

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΟΓ και ΒΟΔ προκύπτει ότι ΟΓ = ΟΔ

Άρα το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές

**18.**

Να αποδείξετε ότι

**α)** $ημ^2 120^o\, ημ^2 150^o\, ημ^2 135^o = \dfrac{3}{32}$  **β)** $συν\,(65^o + x) + συν\,(115^o – x) = 0$

**γ)** $\dfrac{εφ150^o \cdot ημ(135^o + α)}{εφ30^o\, ημ(45^o - α)} = -1$  **δ)** $ημ^2(45^o + x) + συν^2(135^o – x) = 1$

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

Γνωρίζουμε ότι $ημ120^o = ημ60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$ημ150^o = ημ30^o = \dfrac{1}{2}$ ,

$ημ135^o = ημ45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ άρα

$$ημ^2 120^o\, ημ^2 150^o\, ημ^2 135^o = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{32}$$

**β)**

Για τις γωνίες $65^o + x$ και $115^o – x$ ισχύει $(65^o + x) + (115^o – x) = 180^o$

Άρα $συν\,(65^o + x) = -συν\,(115^o – x)$ οπότε

$συν\,(65^o + x) + συν\,(115^o – x) = 0$

**γ)**

Επειδή $150^o + 30^o = 180^o$ θα είναι $εφ150^o = -εφ30^o$

Επειδή $(135^o + α) + (45^o – α) = 180^o$ θα είναι $ημ(135^o + α) = ημ(45^o – α)$

Επομένως $\dfrac{εφ150^o \cdot ημ(135^o + α)}{εφ30^o\, ημ(45^o - α)} = \dfrac{-εφ30^o \cdot ημ(45^o - α)}{εφ30^o\, ημ(45^o - α)} = -1$

**δ)**

Ομοίως $συν(135^o – x) = -συν(45^o + x)$

Άρα $ημ^2(45^o + x) + συν^2(135^o – x) = ημ^2(45^o + x) + [-συν(45^o + x)]^2 =$

$= ημ^2(45^o + x) + συν^2(45^o + x) = 1$

**19.**

Έστω τα πολυώνυμα $Α = 2x^2 – 3x + 1$, $Β = x^3 + 4$ , $Γ = -x^4 + x^3 – 4$

**α)** Να βρείτε το πολυώνυμο $Κ = 3Γ – ΑΒ$ και να το διατάξετε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του $x$.

**β)** Να βρείτε την αριθμητική τιμή του $Κ$ για $x = -1$.

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

$Κ = 3Γ – ΑΒ = 3(-x^4 + x^3 – 4) – (2x^2 – 3x + 1)(x^3 + 4) =$

$= -3x^4 + 3x^3 – 12 – (2x^5 + 8x^2 – 3x^4 – 12x + x^3 + 4) =$

$= -3x^4 + 3x^3 – 12 – 2x^5 – 8x^2 + 3x^4 + 12x – x^3 – 4 =$

$= -2x^5 + 2x^3 – 8x^2 + 12x – 16$

**β)**

Για $x = -1$ η τιμή του $Κ$ είναι $Κ = -2(-1)^5 + 2(-1)^3 – 8(-1)^2 + 12(-1) – 16 =$

$= 2 – 2 – 8 – 12 – 16 = -36$

## 20.

**α)** Αν για τις πλευρές α, β , γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\frac{\beta}{\alpha+\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}=0$,

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές

**β)** Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, δείξτε ότι $\alpha^2-\beta^2=\beta\gamma-\alpha\gamma$

**Προτεινόμενη λύση**

**α)**

$\frac{\beta}{\alpha+\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}=0$ άρα $(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)\frac{\beta}{\alpha+\gamma}-(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)\frac{\gamma}{\alpha+\beta}=0$

$\beta(\alpha+\beta)-\gamma(\alpha+\gamma)=0$

$\alpha\beta+\beta^2-\alpha\gamma-\gamma^2=0$

$\alpha(\beta-\gamma)+(\beta^2-\gamma^2)=0$

$\alpha(\beta-\gamma)+(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)=0$

$(\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=0$ και αφού $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$\beta-\gamma=0$ δηλαδή $\beta=\gamma$, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές

**β)**

$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=(\alpha-\beta)(-\gamma)^*=\beta\gamma-\alpha\gamma$

* $\alpha+\beta+\gamma=0$ άρα $\alpha+\beta=-\gamma$